

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ: TÜRKÇE BİLİM FELSEFESİ ÇALIŞMALARINDA YENİ BİR DÖNEMİN BAŞLANGICI: ÇAĞDAŞ BİLİM FELSEFESİ SERİSİ	15
GİRİŞ.....	19
AHMET ÇEVİK EDİTÖRÜN ÖNSÖZÜ	31
MATEMATİKSEL PLATONCULUĞUN DÜNYÜ VE BUGÜNÜ.....	37
FAZİLET FATİMA ALÇIK MATEMATİKSEL DOĞALCILIK	71
HALİSE AVŞAR MANTIKÇILIK VE NEO-MANTIKÇILIK.....	117
TOLGAHAN TOY BİÇİMSİLCİLİK	149
SİNAN TANRIKULU MATEMATİK FELSEFESİNDE SEZGİCİLİK	201
KORAY AKÇAĞÜNER MATEMATİK FELSEFESİNDE YAPISALCILIK VE MATEMATİKSEL YAPISALCILIK	249
DİLEK KADIOĞLU KURGUSALCILIK	279
OSMAN GAZİ BİRGÜL MATEMATİĞİN KURAMSAL TEMELLERİ.....	311

DİLEK YARGAN, OSMAN GAZİ BİRGÜL	
YAPAY ZEKÂ VE MATEMATİK	343
MEHTAP DOĞAN	
GEOMETRİDE ONTOLOJİ VE EPİSTEMOLOJİ İLİŞKİSİ	373
CAN ÇÖTELİ	
SÖZLÜK.....	421
DİZİN.....	433

GİRİŞ

Matematikçilerin ve felsefecilerin ortak cevaplaması gereken en önemli sorular, matematiğin nesnelerinin nereden geldikleri, nesnelerin bilgisine nasıl erişildiği, bu nesneleri istenilen şekilde kullanmamız için matematikte kabul edilen varsayımların neye göre seçildiği, matematiksel yöntemin neye dayandığı gibi matematiğin temellerini ilgilendiren sorulardır. Bu sorulara, matematiğin kendisini de ilgilendirecek şekilde yanıt aramak önemli bir husustur. Matematiğin temellerini ve felsefesini çalışırken, matematiğin nesnelerini yalnızca felsefe ve felsefecilerin yorumları içinde değerlendirmek ya da felsefi sorunları göz ardı ederek saf matematik alanını teknik biçimde çalışmak kısıtlı bir yöntemdir. Matematik felsefesini matematiğin kendisiyle, yani matematiğin teoremleriyle, varsayımlarıyla, matematikçilerin tartıştığı konularla beraber çalışmak son zamanlarda tercih edilen bir yöntem olmuştur. Örneğin sayılarla ilgili felsefi ve temel meseleleri çalışırken, yalnızca tarihe mal olmuş filozofların sayıdan ne kastettiklerini, sayı hakkında ne söylediklerini ve sayılara kültürel açıdan ne anlam yüklediklerini araştırmakla kalmayıp, bunun yanında günümüzün öncü felsefecilerinin ve mantıkçılarının mevcut çalışmalarını, farklı aritmetik kuramlarının matematikteki kanıtlama gücünün ne olduğunu, bu farklı anlayışların matematiğin pratiğini nasıl etkilediğini de incelemek gerekir. Bunun için hem matematikçilere hem felsefecilere büyük görevler düşmektedir. Matematikçi öncelikle felsefe literatürünü tarayabilmeli, bir felsefeci kadar derinlemesine olmasa da felsefi kavramların ne olduğunu bilmeli ve yeterli düzeyde felsefe tarihi hakkında bilgi sahibi

olmalıdır. Felsefeci ise ilgili alandaki matematikçilerin hangi sorularla uğraştığını, matematiksel mantık çalışan insanların matematiğin temelleriyle ilgili tartıştıkları konuların ne olduğunu takip etmeli ve en önemlisi de felsefi değeri olan meta-teoremleri (kanıtlarıyla olmasa bile) bilmelidir. Bunun için elbette bir felsefeci ihtiyaç duyduğu kadar matematiksel ifadeleri okuyabilmeli ve yazabilmelidir.

Matematikte felsefi boyutu en yüksek olan problemler, çoğunlukla matematiksel mantığın konularını ilgilendirir. Matematiksel mantığın dallarından biri küme kuramıdır. Küme kavramının tarihi, felsefecilerin bu kavrama ne anlam yüklediği, hatta felsefeciler dışındaki uzmanların dahi küme kavramını nasıl kullandıkları elbette önemlidir. Ancak matematik felsefesinde en can alıcı meselelerin, kümelerle ilgili teoremlerle ilişkili olduğunu söylemek mümkündür. Örneğin, *Süreklilik Hipotezi* (İng. *Continuum Hypothesis*) olarak bilinen önermeyi matematik felsefesi ya da matematiksel mantık çalışan birçok kişi bilir. Fakat Süreklilik Hipotezinin farklı formlarının olduğu, hatta yalnızca Seçim Aksiyomu (İng. *Axiom of Choice*) altında bu formların birbirine denk olduğu detayı çoğunlukla gözden kaçırılır. Georg Cantor'un öne sürdüğü Süreklilik Hipotezinin orijinal formu şöyle ifade edilebilir:

“Reel sayılar kümesinin sonsuz olan her altkümesi ya doğal sayılar kümesiyle ya da reel sayılar kümesiyle eşleniktir.”

Bir diğer formu ise Alef harfleriyle ifade edilen şu önermedir:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

$|A|$ ifadesi A kümesinin eleman sayısını göstermek üzere, Süreklilik Hipotezinin bir diğer formu da şöyle ifade edilir:

“ $|\mathbb{N}| < |S| < |\mathbb{R}|$ koşulunu sağlayan bir S kümesi yoktur.”

İşte bütün bu formlar Seçim Aksiyomu altında birbirine denktir. Ancak Seçim Aksiyomu kabul edilmezse bu formlar birbirine denk olmak zorunda değildir. Dahası, Seçim Aksiyomu kabul edilmezse ortaya şöyle bir anomali ortaya çıkar:

“Reel sayılar kümesinin öyle bir bölüştürmesi (İng. *partition*) vardır ki bölüştürme kümesinin eleman sayısı reel sayılardan daha fazladır.”

Bu oldukça paradoksal bir sonuçtur. Seçim Aksiyomu kabul edilmezse bu tarz sonuçlara izin vermiş oluruz. Öte yandan Seçim Aksiyomu’nun varlığı da en az bu kadar paradoksal sonuçlara yol açar. Bu aksiyomun en çok bilinen paradoksal sonuçlarından biri Banach-Tarski teoremidir. Banach-Tarski teoremine göre, üç boyutlu uzayda bir küre alındığında, bu küreyi öyle beş parçaya ayırabiliriz ki bu parçaları uzayda sadece döndürerek ve öteleyerek birleştirdiğimizde aynı küreden tam iki tane elde ederiz. Bu teorem de en az yukarıdaki anomali kadar paradoksaldır. Acaba uzay boşluğundan anladığımız şey 3-boyutlu Öklid uzayıyla temsil edilmemekte midir? Seçim Aksiyomu uzayı nasıl algılamamıza neden olmaktadır? Seçim Aksiyomu’nun matematik felsefesindeki diğer rolleri nelerdir? Bir aksiyom neye göre kabul edilmelidir? Bütün bu sorular küme kuramının felsefesini ilgilendirir.

Anlamaya ve açıklamaya çalıştığımız şey sadece uzay kavramıyla sınırlı değildir. Küme kavramını da açıklamak matematiksel mantıkçılara ve felsefecilere düşmektedir. Bilindiği gibi, Süreklilik Hipotezi’nin küme kuramından bağımsız olduğu (Gödel, 1939) ve (Cohen, 1963) tarafından kanıtlanmıştır. Süreklilik Hipotezi’nin doğru olduğu küme evrenlerini, hipotezin yanlış olduğu küme evrenlerinden nasıl ayırabiliriz? Hangi ölçütü temel alarak bu evrenleri ayırabiliriz? Her küme evreni aynı derecede geçerli midir? Birden çok küme evreninin varlığı kabul edilmeli midir?

Çok evrenler arasında bir evreni diğerlerine göre daha çok tercih etmek gerekir mi? Bu soru benim de (Çevik, 2023) çalışmamda dahil olduğum ve buna bir çözüm önerdiğim problem olmuştur.

Kümelerle ilgili matematiksel mantık tarafına daha ağırlık verilen felsefi problemler de vardır. Gödel'e göre kümeler evreninin herhangi bir yapısı yoktur. Gödel şunu demiştir:

Kümeler evreni yapısal olarak tanımlanamazdır. Bu önermeyi daha kesin şekilde öne sürmenin bir olası yolu şudur: Kümeler evreni, herhangi bir kardinal sayının sonsuz mantığı da dahil olmak üzere, sonlu veya sonlu-ötesi (İng. *transfinite*) tipteki herhangi bir mantıkta ifade edilebilen üyelik ilişkisinin herhangi bir iç yapısal özelliği ile biricik şekilde betimlenemez (yani, başlangıç kesimlerinin tümünden ayırt edilemez). Bu ilke kapalılık ilkesinin bir genellemesi olarak görülebilir (Wang, 2016, s. 280).

Kümeler evreninin tanımlanamazlığından dolayı, küme kuramı çalışan matematikçiler ve felsefeciler *yansıma ilkeleri* (İng. *reflection principles*) adındaki önermelere başvururlar. Kabaca açıklamasıyla *yansıma ilkesi*, kümülatif küme evreninin herhangi bir özelliği için, aynı özelliğe sahip olan bir kümenin (yani evrenin bir başlangıç kesiminin) bulunabildiğini söyler. Bu konu doğrudan *büyük kardinaller* (İng. *large cardinals*) konusuyla ilişkilidir. Büyük kardinallerin var olduğunu iddia eden önermeler ZFC küme kuramının tutarlı olduğunu kanıtlar. Elbette Gödel'in eksiklik teoremi gereği, küme kuramı kendi tutarlılığını kanıtlayamadığı için, ZFC'nin aksiyomları büyük kardinallerin varlığını kanıtlayamaz; çünkü eğer kanıtlarsa kendi tutarlılığını kanıtlamış olur. Gödel'in tamlık teoremi (İng. *completeness theorem*) gereği, birinci-derece mantıkta bir kuramın tutarlı olması demek o kuramın bir modelinin olması demek olur. Ancak tam da burada sonsuzluklarla ilgili başka bir derin

problemin karşımıza çıktığını görürüz. A kümesi sonsuz bir küme olsun. A kümesinin *sayılabilir sonsuz* olması demek A 'nın elemanları ile doğal sayılar kümesinin elemanları arasında birebir eşleme olması demektir. Aksi halde A kümesine *sayılamaz sonsuz* küme denir. Eğer küme kuramının aksiyomlarının sağlandığı herhangi bir sonsuz model varsa, o zaman Löwenheim-Skolem teoremi gereği bu kuramın sayılabilir sonsuz bir modeli de var olmak zorundadır.¹ ZFC küme kuramından, reel sayılar kümesi gibi sayılamaz sonsuz kümelerin varlığı kanıtlanabilir. Ancak ZFC'nin bir modeli varsa, Löwenheim-Skolem teoreminden dolayı sayılabilir sonsuz bir $\mathcal{M}$ modeli var vardır. Bir taraftan $\mathcal{M}$ modelinin içinde reel sayılar kümesinin varlığı kanıtlanabilirken, diğer tarafta $\mathcal{M}$ modelinin içinde sadece sayılabilir sonsuz sayıda eleman olabilir. $\mathcal{M}$ modelinin içinde reel sayılar kümesi sayılamaz sonsuz olarak tanımlıyken, dışarıdan bakıldığında bu küme aslında sayılabilir sonsuzdur. Sayılabilir evren içinde nasıl sayılamaz bir küme olabilir? Buna *Skolem paradoksu* denmiştir. Bir kümenin sayılabilir sonsuz ya da sayılamaz sonsuz olması, hatta sonsuz olup olmaması mutlak bir kavram değildir. Modelden modele bunlar değişebilir. Bir küme bazı modellerde sonsuz olabilirken diğer modellerde sonlu olabilir. Kümelerin sonsuzluğunun modeller tarafından mutlak olarak algılanamaması felsefi değeri yüksek bir problemidir. Örneğin, Putnam (1980) bu problemi dil felsefesi açısından ele almıştır. Skolem paradoksu, kardinalite kavramının mutlak olmadığını göstermiştir.

Aslında matematik felsefesinin matematiğin kendisiyle ilişkili soruları yalnızca küme kuramıyla ilgili meselelerle

1 Bu aslında Löwenheim-Skolem Teoreminin aşağı yönüdür: T kümesi, birinci-derece yüklem mantığında ifade edilmiş bir teori, yani bir önermeler kümesi olsun. Eğer T 'nin sonsuz bir modeli varsa, o zaman T 'nin sayılabilir sonsuz bir modeli vardır.

kısıtlı olmak zorunda değildir. Skolem paradoksundan da anlaşılacağı gibi, modellerle ilgili çeşitli meseleler de matematik felsefesinde çalışılmaktadır. Modeller kuramı matematiksel mantığın bir diğer dalıdır ve bu kuram modern matematik felsefelerinden biri olan yapısalcılığın en çok bağlantılı olduğu matematik alanıdır. Sadece *yapı* (İng. *structure*) kavramının kendisi bile matematiğin nasıl ele alınabileceği ve matematiğin hangi nesnelerle ilgili olabileceğine dair bize fikir vermektedir. Yapısalcılık esasen (Benacerraf, 1965) tarafından küme-kuramsal realizme karşı çıkıldığı *What numbers could not be?* adlı çalışmadan, sayıların küme kuramsal olarak neye karşılık geldiği sorusundan ortaya çıkan bir görüş olmuştur. Sayıların birbirinden farklı küme kuramsal gösterimleri vardır. Örneğin, '3' sayısını küme dilinde Zermelo gösterimine göre $\{\{\emptyset\}\}$ şeklinde, Von Neumann notasyonuna göre $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ şeklinde gösterebiliriz. Buna göre '3' sayısının neye özdeş olduğu sorusu sorulabilir. Ancak bu sorunun tek bir cevabı yoktur. Bu da küme-kuramsal realizmde *saptama problemi* (İng. *identification problem*) ortaya çıkarır. Sayı kavramı tek bir küme gösterimine ait olamaz. Yapısalcılığa göre bir doğal sayının kendisinin nasıl tanımlandığı veya ne olduğu değil, diğer sayılarla olan ilişkisi önemlidir. Yapısalcılığın birçok alt türü vardır. Charles Parsons'un ortaya koyduğu *eleyici yapısalcılık* (İng. *eliminative structuralism*) ve *eleyici-olmayan yapısalcılık* (İng. *non-eliminative structuralism*) ayrımı bunlardan yalnızca ikisidir. Her bir görüş, yapısalcılığı ontolojik olarak farklı şekilde ele alır. Eleyici yapısalcılık, örneğin, yapıların gerçekte soyut birer nesne olarak var olmadığını kabul ederken, eleyici-olmayan yapısalcılık yapıların varlığını kabul eder. Bu ayrım belki matematiğin kendisinden ziyade felsefeyi etkileyen bir ayrımdır. Ancak yapısalcılığın modeller kuramı dışında oldukça ilişkili olduğu başka bir matematik alanı

vardır ki bu da *kategori kuramıdır*. Son yıllardaki çalışmalara bakıldığında, yapısalcılık ile kategori kuramı arasında çok sıkı bir ilişki kurulduğu görülebilir. Kategori kuramı bugün matematiğin alternatif bir temel (İng. *foundational*) kuramı olmaya adaydır. Küme kuramı daha sezgisel ve daha köklü bir alan olarak bilinse de kategori kuramı daha teknik ve daha yani bir alan olarak kabul edilir. İkisi arasındaki en önemli fark, küme kuramında matematiğin *içinelik* ya da *elemen olma* kavramıyla kurulması, kategori kuramında ise matematiğin yapılar arasındaki dönüşümler ve bu dönüşümlerin özellikleri cinsinden kurulmasıdır. İki kuramın dilleri farklıdır. Birinin bir alanı daha iyi temsil ettiği durumlar olabilir. Ancak iki kuram arasında bir çatışma olduğunu söylemek pek doğru olmaz.

Matematik felsefesinin matematikle doğrudan bir başka ilişkili olduğu alan kanıt kuramıdır. Kanıt kuramı her ne kadar ülkemizde çalışılmasa da dünyada az sayıda araştırmacı tarafından ciddi biçimde çalışılmaktadır. Kanıt kuramının son zamanlarda çalışılan araştırma problemleri, az önce sözünü ettiğimiz yansıma ilkelerini ilgilendiren sorularla örtüşmektedir. Bununla beraber kanıt kuramında, farklı aritmetik veya küme kuramlarının kanıt-kuramsal güçleriyle (İng. *proof-theoretic strength*) ilgili teoremler önemlidir. Gentzen'in 1936'da kanıtladığı *tutarlılık kanıtı*, birinci derece Peano aritmetiğin (PA), tutarlılık kanıtında kullanılan diğer sistemlerin içinde bir çelişki olmadığı sürece tutarlı olduğunu söylemektedir. Gentzen'in kanıtı, biçimsel sistemlerin ordinal analizine ilk örneklerinden biri olmuştur. Ordinal analizinde kanıt kuramcılar bir kuramın (kanıtlama) gücünü anlamak için ne kadar sayıda inşa-edilebilir ordinallerin iyi-sıralı olduğunun kanıtlanabildiğine bakar. Bunu yaparken sonlu-ötesi tümevarım ilkesinin bu sınırı belirlemesine bakarlar. Bir kuramın ordinal analizi şunu ortaya koymak içindir:

Bir T kuramın kanıt-kuramsal gücü eğer bir S kuramının kanıt-kuramsal gücünden daha büyükse, o zaman T kuramı S kuramının tutarlılığını kanıtlayabilir. Burada Gentzen'in kanıtının matematik felsefesi açısından önemi ise Hilbert programı ve Gödel'in eksiklik teoremiyle ilişkili olmasıdır. Gödel'in ikinci eksiklik teoremine göre bir biçimsel sistem asla kendi tutarlılığını kanıtlayamaz; ancak daha güçlü bir sistem bunu kanıtlayabilir. Gentzen'in, PA'nın tutarlılığını kanıtlarken oluşturduğu biçimsel teori aslında PA'nın bir uzantısı değildir; aritmetiğin *bir kısmına* çeşitli kurallar ekleyerek elde ettiği PA'nın dışında bir sistemdir. Ancak bu sistem PA'nın tutarlılığını kanıtlamaktadır. Böylece Gentzen'in teoremi Gödel'in ikinci eksiklik teoreminden etkilenmez.

Hesaplanabilirlik kuramıyla ilişkili bazı problemlerin de matematik felsefesi açısından oldukça önemli olduğunu unutmamak gerekir. Bunlardan en önde geleni elbette algoritmik hesaplanabilirliğin tanımıyla ilgili sorulabilecek sorulardır. Her adımın açık, net, insan tarafından prensipte yapılabilirdiği birbirinden ayrık komutlar dizisine kabaca tanımıyla *algoritma* diyebiliriz. Aslında *algoritma* kavramının kullanımı çok eski çağlara dayanır. İlk algoritmalar büyük ihtimalle çeşitli ritüellerinin nasıl yapılacağını ve yemek tariflerini içeriyordu. Ancak matematik alanında en eski bilinen algoritmalar çoğunlukla sayıların değerlerini hesaplamakta kullanılırdı. Eski Mısırlılar iki sayının nasıl çarpılacağını adım adım yöntemini geliştirmiş, Babiller $\sqrt{2}$ sayısını virgülden sonraki ilk beş basamağına kadar doğru hesaplayan bir yöntem bulmuşlardır. Antik çağa ait bilinen en meşhur algoritmalarından biri Öklid'in EBOB (en büyük ortak bölen) yöntemidir. Öklid'in algoritması, iki sayı verildiğinde bu iki sayının en büyük ortak bölenini bulmaya yarar. Antik çağlarda bulunan bir diğer algoritma *Eratosthenes'in eleği* (İng. *Sieve of Eratosthenes*) adı verilen ve

asal sayıları bulmaya yarayan yöntemdir. Bütün bu yöntemler geliştirilirken, 20.yüzyıla kadar algoritmik hesaplamanın matematiksel olarak tanımının ne olması gerektiği hakkında pek düşünülmemiştir. Bir yandan sayı, fonksiyon, dizi, grup gibi matematiksel nesneler vardır. Diğer yandan da matematik yaparken başvurduğumuz kanıt, teori, algoritma ve yapı gibi kavramlar vardır. İşte algoritmalar, aynen *kanıt* gibi ya da *yapı* gibi veya *teori* gibi birer üst tip meta-matematiksel nesne olarak görülmüştür. Belki de üzerinde matematiksel olarak çalışılmamış olmamasının nedeni budur. 20.yüzyıla gelindiğinde *hesaplanabilirlik* kavramının ne olması gerektiği hakkında matematikçilerin tartıştığını ve çeşitli modeller öne sürdüklerini görüyoruz. Aslında önceleri, özellikle Thoralf Skolem'in çalışmasıyla birlikte, hesaplanabilir fonksiyonlar *özyinelemeli fonksiyon* (İng. *recursive function*) kavramıyla ilişkilendirilmiştir. Skolem, çeşitli aritmetiksel fonksiyonların *primitif* bakımdan hesaplanabilir olduğundan söz etmiştir. Primitif hesaplanabilir fonksiyonlar, özetlemek gerekirse, aritmetikten bildiğimiz toplama, çarpma, üs alma, yerine koyma, kendini çağırma (yani özyineleme) gibi eninde sonunda mutlaka hesaplamanın sonlandığı ya da tanımlı olduğu işlemlerden meydana gelir. Bu fonksiyonlar aslında olağan matematikteki doğal birçok fonksiyonu kapsar. Ancak sonradan, *hesaplanabilir* olan fonksiyonların yalnızca primitif hesaplanabilir fonksiyonlardan meydana gelmediği anlaşılmıştır. Sezgisel ve daha geniş anlamda *hesaplanabilir* olup primitif anlamda hesaplanabilir olmayan fonksiyonlar vardır. Bu fonksiyonlar, örneğin, hesaplaması bitmeyen ancak sürekli olarak belli bir algoritmik yöntem takip edilerek belli bir değerin arandığı işlemler olabilir. Demek ki öncelikle *hesaplanabilirliğin* ne olduğu tanımlanmalıdır. Gödel, eksiklik teoremini kanıtladıktan bir süre sonra, 1934'te Princeton Üniversitesinde verdiği derslerde, *genel hesaplanabilir fonksi-*

yonlar sınıfını, primitif hesaplanabilir fonksiyonların üstüne ek olarak iç içe geçmiş çift-özyineleme (İng. *double recursion*) kuralını getirerek tanımlamış, ortaya çıkan bu sınıfın tüm hesaplanabilir fonksiyonları temsil ettiğini iddia etmiştir. Stephen Cole Kleene ise μ -hesaplanabilir fonksiyonlar sınıfını tanımlamış, benzer iddianın bu sınıf için geçerli olduğunu savunmuştur. Alonzo Church, bugün fonksiyonel programlama dillerinin temelini oluşturan λ -kalkülüs sistemini geliştirmiş, aynı şeyi Church kendi geliştirdiği fonksiyonlar için söylemiştir. Bütün bu hesaplama modellerinin *hesaplanabilirlik* kavramını bütünüyle ifade ettiği kabul edilmektedir. Ancak bunların hiçbiri *doğal* bir model değildir. Alan Turing, 1936 yılında geliştirdiği *Turing makinesi* modeliyle hesaplanabilirlik kavramının tanımının ne olması gerektiğini ortaya koymuştur. Gödel başta olmak üzere dönemin birçok matematikçisi, Turing makinesini hesaplamanın en doğal modeli olarak görmüştür. Aslında Turing makinesi, bir matematikçinin prensipte nasıl hesap yaptığını modeller. Zaman ve kaynak sınırı olmaksızın, insanın kâğıt-kalemle yapabildiği tüm hesaplamaların, prensipte bir Turing makinesi tarafından da yapılabilirdi varsayılır. Bu varsayıma *Church-Turing tezi* denilmiştir. Bu yüzden Church-Turing tezi, bugün *hesaplanabilirlik* kavramının tanımı olarak kabul edilir. Buradan oldukça önemli felsefi sonuçlar çıkar. Durma problemi gibi, Post karşılık problemi gibi ya da bağlamdan bağımsız dillerle ilgili sorulabilecek bazı sorular gibi Turing makineleriyle hesaplanamayan (ya da çözilemeyen) problemlerin var olduğu bilinmektedir. Eğer algoritmik hesaplama kavramı Turing makineleriyle sınırlı bir şeyse, o zaman mutlak anlamda çözilemeyen, yani karar verilemeyen problemler vardır. Öte yandan, Church-Turing tezinin kabul edilmemesi, hesaplanabilirlik kavramının tanımını yapmak için klasik anlamda algoritmik olmayan yöntemlere ve araçlara başvurmamıza imkân sağlar. Burada önemli bir

felsefi ayırmadan birini tercih etmek zorunda olduğumuzu söyleyebiliriz. Ya hesaplanabilirlik kavramını tanımlamanın artık sonuna geldiğimizi kabul edip Turing makinelerini hesaplanabilirliğin mutlak tanımı olarak ele almalıyız ya da başka yöntemlerin de algoritmik hesaplamanın kapsamına girebileceğini düşünüp Turing mekaniklerinin ötesine geçeceğiz. Birinci seçeneği tercih etmek demek *tanımlanabilirlik* (İng. *definabilism*) felsefesini benimsemek olur. Tanımlanabilirlik felsefesi, bir kavramın bütünüyle tanımlanabileceğini savunur. Matematiğin tarihsel gelişimine baktığımızda, bu felsefenin matematik için çoğunlukla geçerli olmadığını görüyoruz. Evrendeki sistemi yani *kosmos*'u anlamamız için bir zamanlar sadece doğal sayıların ve rasyonel sayıların yeterli olduğu düşünülüyordu. Ancak sonradan irrasyonel sayılara ihtiyaç duyuldu ve irrasyonel sayılar matematiksel ontolojiye eklendi. Bu da yetmedi, sanal sayılara ihtiyaç duyuldu, hatta sonraları sürreal sayılar keşfedildi. Bununla beraber, 2000 sene boyunca tek uzay anlayışı olarak kabul edilen Öklid geometrisinin tek uzay anlayışı olmadığı anlaşıldı ve Öklid-dışı geometriler kabul edildi. En sonunda Paul Cohen'in çalışmasıyla küme kuramında kümeler evreninin zorlama uzantıları (İng. *forcing extensions*) kabul edildi. Öyle görünüyor ki matematik yeni nesnelere ve yeni varsayımlara ihtiyaç duyuyor. Matematiği sabitleştirmek yerine genişletmeye ve zenginleştirmeye ihtiyaç duyuyoruz. Aynı şeyin hesaplanabilirlik kavramı için de geçerli olduğunu söyleyebiliriz. *Algoritmik hesaplanabilirlik* kavramını Turing mekanikleriyle sınırlı tutmak tanımlanabilir bir felsefeyi benimsemek olur. Ancak bu bakış açısının matematiğin doğal gelişimiyle pek uyumlu olmadığını söylemek mümkündür. İşte matematik bu sayede bilim olma özelliğini korur.

Ahmet Çevik
Ankara, 2024