

ÖNSÖZ

Tarih öncesi dönemlerde kullanılan matematik, aradan geçen yüzyıllar boyunca gelişerek bugünkü teknolojilerde kullanılmaktadır. İnsanlar varolduğu sürece devamlı olarak gelişip uygarlıklara hizmet edecektir.

Günümüzde matematik, bilim ve teknolojinin hızlı bir şekilde geliştiği bir dönemde modern mühendislik ve fizik eğitiminin büyük bir bölümünü oluşturmakta olup “matematik, bilim dallarının temelidir” denilebilir.

Matematik, öğrenmeyi, öğretmeyi, analiz, sentez, kavrama, tümdengelim ve tümevarım gibi akıl yürütmelerine imkan sağlamaktadır. Öğrencilerin kararlı, sistemli ve sabırlı olmalarına yardım eder, yorum güçlerini geliştirir. Böylece insan zekasının gelişmesine yardımcı olur.

Bu kitap üniversitelerin Fen ve Mühendislik Fakültelerinin birinci sınıflarında okutulan Matematik I ve II dersleri için müfredat programına göre özenle hazırlanmış ve öğrencilerin anlayabileceği yalın dil ile yazılıp düzenlenmiştir.

Bu kitabın öğrencilerimize faydalı olması ümidiyle...

Prof. Dr. Vedat ASİL

İÇİNDEKİLER

• Bölüm 1	
Kümeler.....	9
• Bölüm 2	
Önermeler.....	16
• Bölüm 3	
Sayılar.....	39
• Bölüm 4	
Trigonometri.....	62
• Bölüm 5	
Karmaşık (Kompleks) Sayılar	103
• Bölüm 6	
Bağıntı-Fonksiyonlar.....	126
• Bölüm 7	
Parabol.....	158
• Bölüm 8	
Logaritma.....	173
• Bölüm 9	
Matrisler ve Determinantlar.....	193
• Bölüm 10	
Fonksiyonların Limiti ve Sürekliliği.....	226
• Bölüm 11	
Türev.....	265
• Bölüm 12	
İntegral.....	322
• Bölüm 13	
Diziler ve Seriler.....	388
• Bölüm 14	
Vektörler.....	425
Kaynaklar.....	453

BÖLÜM 1

KÜMELER

Modern matematiğin temel öğelerinden biri küme kavramıdır. Küme, matematikteki en temel kavramlardan biri olup tanımlanması oldukça güç bir kavramdır. Bu sebeple kümenin tanımını matematiksel olarak vermek yanlış olur. Böyle bir tanım verildiğinde nesne nedir? Nesneyi tanımlarsak başka bir şeye istinad etmemiz gerekir. Yani kümeyi tanımlarken tanımını veremeyeceğimiz bir başka şeye istinad etmemiz gerekmektedir. (Geometride nokta tanımı gibi). Böylece küme aksiyomatik olarak verilir ve örneklerle açıklanır. Diğer anabilim dallarında da bu kavram kullanıldığı için bu kavram aksiyomatik bir yapıya sahiptir.

Ünlü alman matematikçi George Cantor (1845-1918) ilk kez 1875 yılında kümenin tanımını nesneler topluluğu olarak yapmış ve bu tanımın anlaşılması kolay olduğu için benimsenmiştir.

Buna göre bir küme için şöyle bir tanım yapılabilir:

Tanım 1.1. Küme, iyi tanımlanmış bir nesneler topluluğudur. Kümeyi oluşturan nesnelere **kümenin elemanları** adı verilir. Kümeler, genellikle ***A*, *B*, *C*, ...** gibi büyük harflerle, elemanlar ise ***a*, *b*, *c*, ...** gibi küçük harflerle gösterilir. Buna göre ***a***, bir ***A*** kümesinin elemanı ise bunu

$$a \in A$$

şeklinde gösteririz. Eğer ***a***, bir ***A*** kümesinin elemanı değilse bunu

$$a \notin A$$

ile gösteririz.

Küme oluşturulurken dikkat edilecek bazı hususlar şunlardır: Örneğin bir kümede bir eleman birden fazla yazılmaz ve elemanların birbirleriyle yer

değiştirmeleri o kümeyi değiştirmez. Bir küme oluşturulurken yine o kümenin elemanlarını ya teker teker belirtmek ya da o kümenin elemanlarının karakteristik özelliğini vermek gerekir. Böylece bir kümeyi gösterirken birden fazla gösterim şekli kullanabiliriz. Örneğin, Bunlardan biri liste yöntemi olup

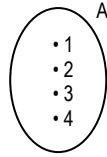
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

şeklindedir.

Kümeyi oluşturan elemanların karakteristik özelliklerini yazarak da bir kümeyi gösterebiliriz: Örneğin:

$$B = \{x: x, 20 \text{ ile } 50 \text{ arasındaki asal sayılar} \}$$

Küme gösterim biçimlerinden biri de Venn Şemasıdır. Yukarıdaki örnek verdiğimiz A kümesini Venn şemasıyla



şeklinde gösterebilir.

Tanım 1.2. Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\emptyset$ veya $\{ \}$ sembolleriyle gösterilir.

Tanım 1.3. A ve B gibi herhangi iki küme verilsin. Eğer A kümesinin her bir elemanı, B kümesinin de elemanı ise, A kümesi, B kümesinin bir **alt kümesidir** denilir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir. Bu durum

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \text{ ise } x \in B \text{ dir}$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 1.1. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümeleri verilsin. Buna göre $A \subset B$ dir. Yani A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir. Çünkü A da ki her eleman aynı zamanda B nin de bir elemanıdır.

Örnek 1.2. $A = \{x, y, z\}$ kümesinin alt kümelerini sırasıyla yazacak olursak:

$$\{x, y, z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \emptyset$$

kümeleri elde edilir.

Alt küme tanımına göre, boş kümede bulunup diğer kümelerde bulunmayan bir eleman yoktur. Bu nedenle boş küme, her kümenin bir alt kümesidir.

Tanım 1.4. Aynı elemanlardan oluşmuş herhangi iki kümeye **eşit küme** denir. Bunu şu şekilde de izah edebiliriz. A ve B herhangi iki küme olmak üzere, hem $A \subset B$ hem de $B \subset A$ ise A ile B kümelerine eşit kümeler adı verilir ve $A = B$ şeklinde gösterilir. Eğer A veya B kümesinin en az bir elemanı diğer kümenin elemanlarından farklı ise A ile B kümelerine farklı kümeler adı verilir ve $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.5. Bir kümenin, eğer varsa kendisinden başka bütün alt kümelerine **özalt küme** adı verilir. Yani $A \subset B$ ve $A \neq B$ ise A kümesine B nin bir özalt kümesi adı verilir.

UYARI: $\{\emptyset\}$ kümesi boş küme olmayıp bir elemanlı ve elemanı $\emptyset$ olan bir kümedir.

Alt Kümeye Ait Bazı Özellikler

1. Her küme kendisinin bir alt kümesidir.
2. Boş küme bütün kümelerin bir alt kümesidir.
3. n elemanlı bir kümenin alt küme sayısı 2^n , özalt küme sayısı ise $2^n - 1$ dir.
4. $n, r \in N$ ve $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin r elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{r}$ ile gösterilir ve

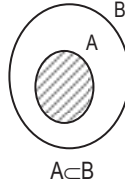
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

şeklinde hesaplanır.

5. A, B ve C herhangi üç küme olmak üzere

$A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir.

Alt kümenin Venn şemasıyla gösterim şekli ise aşağıdaki gibidir.

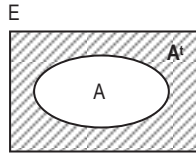


Tanım 1.6. Kümeler teorisinde üzerinde işlem yapılan tüm kümelerin bir küme tarafından kapsandığı düşünülebilir. Tüm kümeleri kapsayan bu kümeye **evrensel küme** denilir ve E harfi ile gösterilir.

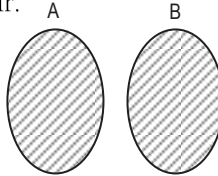
Tanım 1.7. Bir E evrensel kümesinde bir A kümesi verilsin. A kümesinin E evrensel kümesine göre **tümleyeni** A^t ile gösterilir ve

$$A^t = \{x: x \notin A \text{ ve } x \in E\}$$

dir.



Tanım 1.8. A ve B herhangi iki küme olmak üzere $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.



Tanım 1.9. Bir kümenin bütün alt kümelerinin oluşturduğu kümeye o kümenin **kuvvet kümesi** denir. $A = \{a, b\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$$

kümesidir.